

БРОЈЕВНИ СИСТЕМИ

NUMERAL SYSTEMS

НИКОЛА ИЛИЋ, VII разред, Основна школа “Јован Јовановић Змај”, Панчево,
Регионални центар за таленте „Михајло Пупин”, Панчево

МАРИЈА МИХАЈЛОВ, наставник математике, Регионални центар за таленте
„Михајло Пупин“, Панчево

РЕЗИМЕ

Бројевни систем представља систем узаступно писаних симбола који одређују вредност неког броја. Историја бројевних система је надасве интересантна и протеже се чак од најстаријих цивилизација. Ипак, бинарни и декадни бројевни системи су свакако најчешћи и најважнији бројевни системи који се данас користе. Превођење из једног у други бројевни систем је важно за примену ових система у пракси.

Кључне речи: бројевни систем, основа, степеновање, цифре, игре.

ABSTRACT

The numeral system is a writing system for expressing numbers by using digits or other symbols. The history of the numeral systems is quite interesting and it goes way back to the oldest civilisations. However, binary and decimal numeral systems are indeed the most common and important numeral systems used today. Converting from one numeral system to the other is important for their application in practical work.

Key words: number system, basis, grading, digits, games.

УВОД

Ако говоримо о бројевним системима, прва помисао је број. Број је основни појам математике. Бројеви су свуда око нас и појављују се када бројимо и када нас броје. Осим за бројење, они се такође користе за мерење и означавање.

Историја бројева вероватно потиче још из праисторије, када је човек почео да разликује појмове један и више од један. Како се људи тада нису користили писмом, бројање се вршило уз помоћ прстију, а за прво рачунање користили су нанизане чвориће, штапиће и друге предмете.

Када је цивилизација почела да напредује и језик почео да се бележи писмом, тако су и бројеви добили своје ознаке. Али, ниједан од система означавања бројева, који су се развили у тадашњим трговачким друштвима, није постао универзалан.

У древном Египту, бројеви су записивани пиктографима, бројним симболима. Стари Римљани су радије користили слова, и ове ознаке за римске бројеве сачуване су до данашњих дана. Ситуација се променила откривањем бројних симбола, који су свуда у свету познати као арапски. Они су, по неким историјским подацима, почели да се користе пре око две ипо хиљада година. Арапски бројеви представљају универзалан језик бројева и познати су свуда у свету.

Најстарији систем бројева је са основом 2 (било које две цифре) а данас га називамо бинарним (користе се бројеви 0 и 1). Стари Кинези су рано познавали бинарни систем бројева, користећи симболе који су зови же-ким. Симболи су састављени од 64 фигуре, а свака фигура је састављена од по 6 редова, где су у редовима испрекидане или пуне линије. Када је Годфрид Вилхелм Лајбниц (1646-1716) тумачио значење ових симбола, открио је да су прва 64 броја написана бинарним системом где испрекидана линија представља број 0, а пуна линија број 1.

Стари вавилонци су користили бројевни систем са основом 60. Највероватније настао тако што су годину делили на 360 дана, угао на 60 степени, минут на 60 секунди и тако даље.

Када се појавио декадни бројни систем, користили су се прсти обе руке и занимљиво је да чак и данас сва деца почињу да рачунају помоћу прстију.

Доста коришћен систем бројева и био и систем са основом 12, где су поред прстију коришћени и делови између зглобова прстију. Овај систем се одржао и до данас, поготово у западном свету. Користи се реч туце (dozen eng.) за 12 комада нечега.

РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА И ДИСКУСИЈА

Дефиниција бројевних система

У најширем смислу речи, појам бројевни систем представља систем узаступно писаних симбола који одређују вредност неког броја.

Врсте бројевних система

Формирање бројевних система зависи од избора основе система. Основа, означимо је са словом Б, може да буде произвољан природан број који је већи од 1.

У зависности од избора основе, бројевни систем може бити:

- 1) Декадни ($B = 10$);
- 2) Бинарни ($B = 2$);
- 3) Хексадецимални ($B = 16$);
- 4) Октални ($B = 8$);
- 5) Бројевни систем са основом 3;

И тако даље.

Важно је напоменути да ако систем има основу п, у њему ће бити п цифара. На пример:

Декaдни, $B = 10$, има 10 цифара и то су 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9;

Бинарни, $B = 2$, има 2 цифре, 0 и 1;

Систем са основом 5, има 5 цифара, 0,1,2,3,4;

И слично.

Број N , у ознаци $N_{(B)}$, представља збир производа одговарајуће цифре и основе на одговарајући степен

$$N_{(B)} = A_K \cdot B^K + A_{K-1} \cdot B^{K-1} + \dots + A_1 \cdot B^1 + A_0 \cdot B^0$$

Примери:

$$1) \quad 326_{(10)} = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

$$2) \quad 142_{(5)} = 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 25 + 20 + 2 = 47$$

$$3) \quad 10101_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 21$$

Превођење из једног система у други

Превођење из декадног бројевног система

Да би преводили бројевне системе из једнога у други, прво морамо да научимо да декадни бројевни систем преведемо у било који други. На следећим примерима ће бити приказано како се број из декадног система преводи у бинарни, односно октални бројевни систем.

Пример 1: Превођење броја 237 у бинарни бројевни систем, $237_{(10)} \rightarrow ?_{(2)}$

237	118	59	29	14	7	3	1	0
1	0	1	1	0	1	1	1	

Табела 1. Превођење броја 237

Table 1. Converting the number 237

Резултат је $237_{(10)} = 11101101_{(2)}$

Правило: Број x који треба превести се дели са основом B и остатак се пише испод. Крајњи резултат се чита уназад. Правило важи код превођења бројева из декадног система у било који други бројевни систем.

Пример 2: Превођење броја 327 у октални (основа 8)

327	40	5	0
7	0	5	

Табела 2. Превођење броја 327

Table 2. Converting the number 327

Резултат је $327_{(10)} = 507_{(8)}$

Превођење у декадни бројевни систем

Пример 1: број 101101 превести из бинарног у декадни бројевни систем

$$101101_{(2)} = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 = 45_{(10)}$$

Резултат је $101101_{(2)} = 45_{(10)}$

Пример 2: Број 253 из окталног бројног система превести у бинарни бројни систем.

Прво се број из окталног бројног система преводи у декадни, потом се добијени број преводи у бинарни бројни систем.

$$253_{(8)} = 2 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 128 + 40 + 3 = 171_{(10)}$$

171	85	42	21	10	5	2	1	0
1	1	0	1	0	1	0	1	

Табела 3. Превођење броја 253

Table 3. Converting the number 253

Резултат је $171_{(10)} = 10101011_{(2)}$

Примена бројевних система

Рачунарство је настало помоћу бинарног система који је претворен у бинарни код и помоћу тог кода су настали разни језици за програмирање који се користе свакодневно за разне ствари.

Такође, бројевни системи се могу користити за шифровање порука. На пример, телеграфски код. Свако слово је означено са 5 бинарних цифара. Различитих петорки бинарних цифара 0 и 1 имамо 32. То би било довољно да покрије сва слова наше азбуке и још два за знаке интерпункције, на пример зарез и тачку.

Слова	А	Б	В	Г	Д	Ђ	Е	Ж
Телеграф. Код	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111	01000
Декадни број	1	2	3	4	5	6	7	8
Слова	З	И	Ј	К	Л	Љ	М	Н
Телеграф. Код	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111	10000
Декадни број	9	10	11	12	13	14	15	16
Слова	Њ	О	П	Р	С	Т	Ћ	У
Телеграф. Код	10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111	11000
Декадни број	17	18	19	20	21	22	23	24
Слова	Ф	Х	Ц	Ч	Џ	Ш		
Телеграф. Код	11001	11010	11011	11100	11101	11110		
Декадни број	25	26	27	28	29	30		

Табела 4. Телеграфски код
Table 4. The telegraph code

ДОЂИ = 00101 10010 00110 01010

ХВАЛА = 11010 00011 00001 01101 00001

Сем практичне примене, бројевни системи се могу користити и за игре и задатке:

1) Игра погађања помоћу бинарног бројевног система

Слика 1. Погађање замишљеног броја
Picture 1. Guessing the secret number

Ова игра ради тако што неко замисли број између 1 и 127. Ако се број налази у 1. табели, онда се испод пише број 1, а ако се не налази, пише се 0. Исто се уради за сваку табелу, резултат се чита уназад и претвара се у декадни бројевни систем.

Пример: Милош је замислио број 78

Број табеле	1	2	3	4	5	6	7
Бинарни број	0	1	1	1	0	0	1

Табела 5. Погађање замишљеног броја
Table 5. Guessing the secret number

$$1001110_{(2)} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 64 + 8 + 4 + 2 = 78_{(10)}$$

2) Задатак

Перица је добио задатак да напише кратак састав о својој породици. Написао је наизглед шaljив текст:

Моју породицу чине мама, тата, сестра и ја. Мама и тата су се упознали на факултету. Мама је била на почетку студија и имала је 34 године, а тата је био на крају студија и имао је 44 године. Пошто су били веома млади, сачекали су неизвесно време и након 12 година су се венчали. Тата је тада имао 111 година, а мама 101 годину. Исте године сам се родио ја, а после 11 година моја сестра. Ако ја сада имам 30 година, колико су онда стари мама, тата и сестра?

Решење: Да би смо сазнали о ком бројевном систему се ради, прво морамо да видимо колико различитих цифара имау задатом тексту. 0, 1, 2, 3, 4 = 5 различитих цифара. Ради се о бројеном систему са основом 5. Сада само треба да претворимо све бројеве из бројевног система с основом 5 у декадни бројевни систем:

$$34 = 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 15 + 4 = 19$$

$$44 = 4 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 20 + 4 = 24$$

$$12 = 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 5 + 2 = 7$$

$$111 = 1 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 25 + 5 + 1 = 31$$

$$101 = 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 25 + 0 + 1 = 26$$

$$11 = 1 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 5 + 1 = 6$$

$$30 = 3 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 = 15 + 0 = 15$$

Сада, Мама има 41 (26+15), Тата има 46 (31+15) и Сестра има 9 (15-6) година.

ЗАКЉУЧАК

Бројевни системи су системи узаступно писаних цифара и симбола који одређују вредност неког броја. Кроз историју су се користили бројни бројевни системи, али су бинарни и декадни бројевни системи најчешће коришћени у данашње време, захваљујући својој примени у свакодневном животу. Превођење бројевних система из једног у други је математички процес неопходан за коришћење истих. Примена бројевних система у практичне сврхе се највише види у информационој технологији, бинарни бројевни систем и декадни бројевни систем у општој математици широм света.

ЛИТЕРАТУРА

- [1.] М. Дејић, Б. Дејић, *101 математички изазов*, Лагуна, Београд 2021
- [2.] М. Дејић, Б. Дејић, *Занимљиви свет математике*, Техничка књига, Београд 1987
- [3.] Д. Стројк, *Кратак преглед историје математике*, Завод за издавање уџбеника СРС, Београд 1969
- [4.] С. Огњановић, Ж. Ивановић, *Математика 1 - Збирка задатака и тестова за 1. разред гимназија и техничких школа*, Круг, 2023
- [5.] https://en.wikipedia.org/wiki/Numeral_system
- [6.] Бројевни системи - бинарни, осмински, децимални, хексадецимални (rapidtables.org)
- [7.] Microsoft Word - Pozicioni brojni sistemi.doc